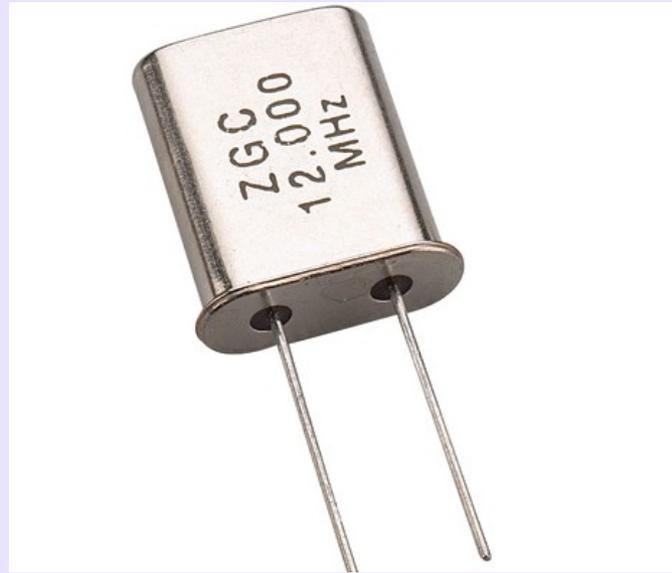


Oscilações



Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

<http://cursos.if.uff.br/fisica2-2015/>

Oscilações LC

Vimos que:

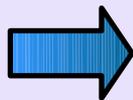
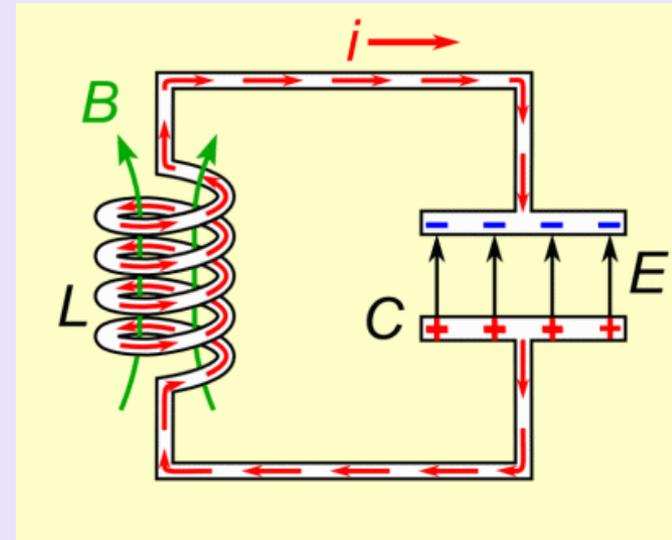
Circuitos RC e RL:

- $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$: têm comportamento exponencial

Veremos agora que:

Circuito LC:

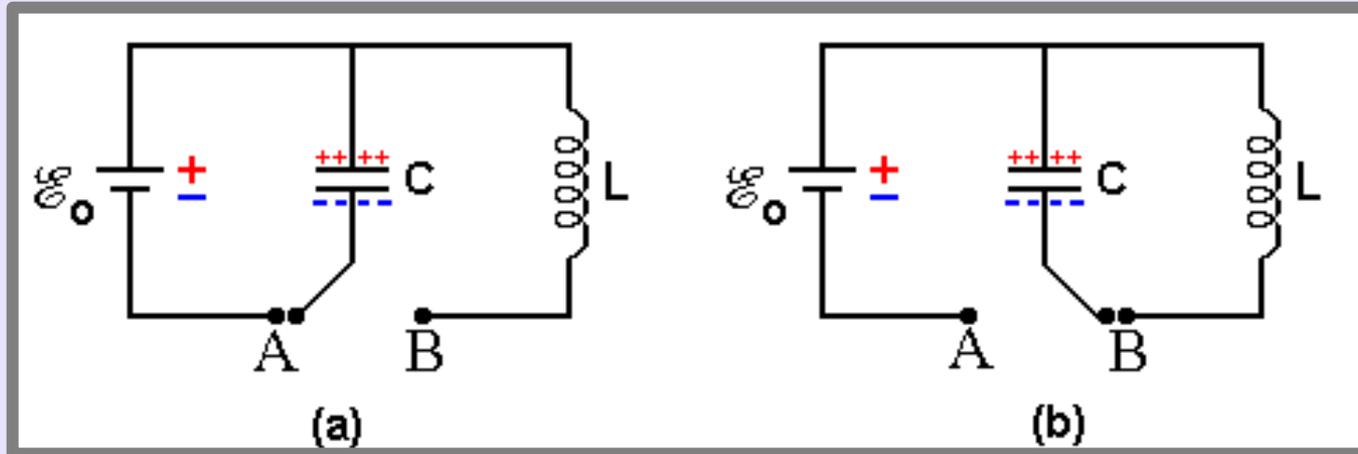
- $q(t)$, $i(t)$ e $V(t)$: comportamento senoidal
- Oscilações
 - campo elétrico do capacitor
 - campo magnético do indutor



Oscilações eletromagnéticas



Oscilações LC



1) Chave ligada em A:

- O capacitor se carrega totalmente ($Q=Q_{\text{máx}}$)
- Neste momento toda a energia do capacitor está armazenada no seu campo elétrico

$$\Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

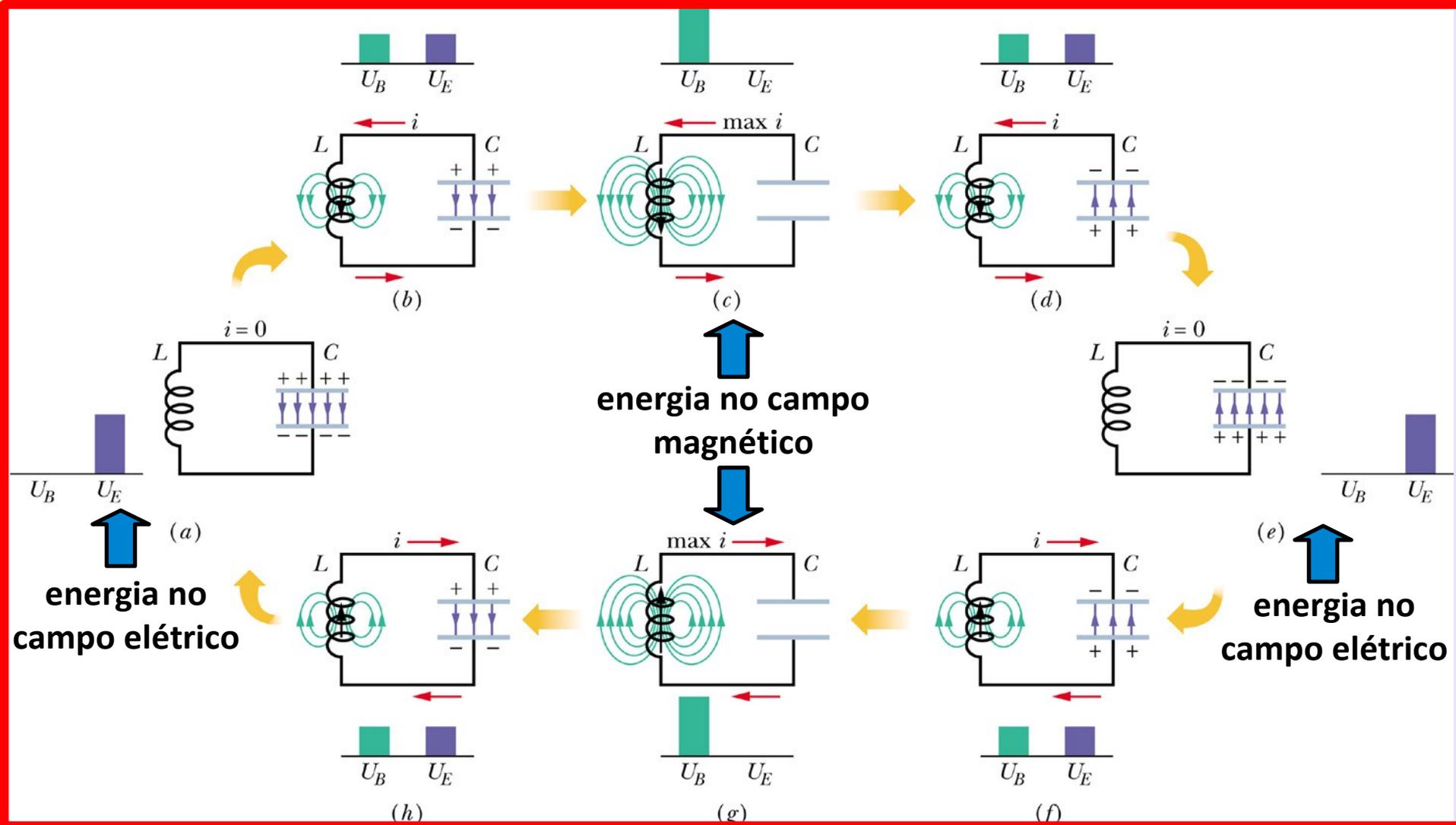
2) Chave ligada em B:

- O capacitor começa a descarregar
- Toda a energia armazenada no campo elétrico do capacitor é transferida para o campo magnético do indutor

$$\Rightarrow U_B = \frac{1}{2} Li^2$$

Percorrido um tempo o processo se inverte

Oscilações LC

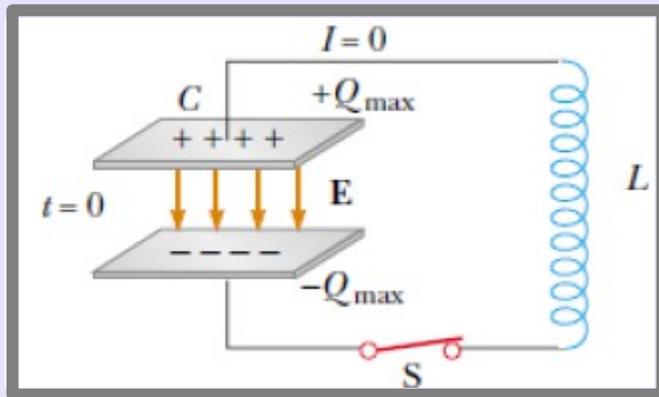


O processo se repete com uma frequência angular $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

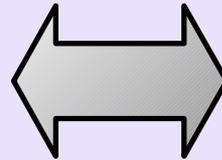
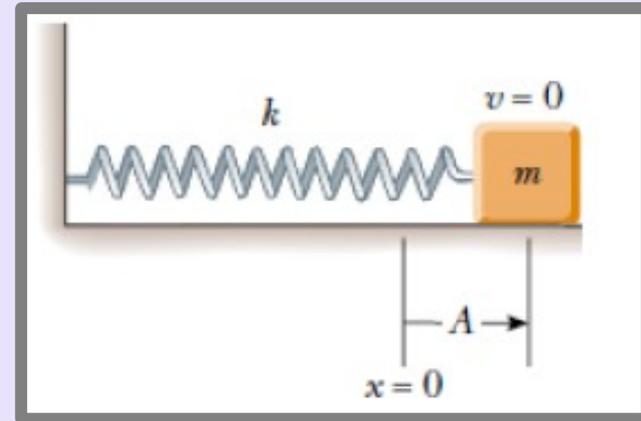


Osciladores harmônicos simples

Circuito LC



Sistema massa-mola



$$\text{Energia Elétrica} : U_E = \frac{q^2}{2C} \text{ (Capacitor)} \Leftrightarrow \text{Energia Potencial} : U_p = \frac{kx^2}{2} \text{ (Mola)}$$

$$\text{Energia Magnética} : U_B = \frac{Li^2}{2} \text{ (Indutor)} \Leftrightarrow \text{Energia Cinética} : U_c = \frac{mv^2}{2} \text{ (Bloco)}$$

$$U_B \Leftrightarrow U_E$$

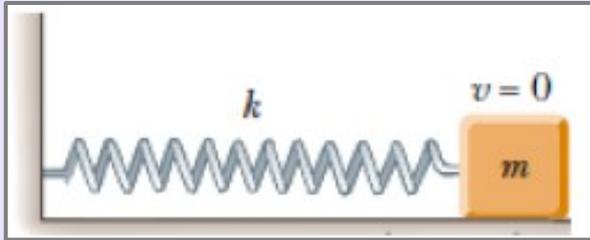
$$U_c \Leftrightarrow U_p$$

$$\text{Energia Total} \Rightarrow U_B + U_E = C^{te} \quad \text{Energia Total} \Rightarrow U_c + U_p = C^{te}$$



Osciladores harmônicos simples

No sistema massa-mola, a **energia total U** é, em qualquer instante:



$$\Rightarrow U = U_c + U_p$$

Se não houver atrito, **U permanece constante**, isto é:

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \left(v = \frac{dx}{dt} \right)$$

cuja solução é: $\Rightarrow x(t) = x_{m\acute{a}x} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\text{Movimento Oscilatório} = \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} & \text{Frequência de oscilação} \\ x_{m\acute{a}x} & \text{Amplitude} \\ \varphi & \text{Constante de fase} \end{cases}$$



Analogia eletromecânica

	Circuito LC	Sistema massa-mola
Frequência angular:	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Amplitude:	Q_m	X_m
Constante de fase:	φ	φ

**Correspondências
entre os dois
sistemas**

$$q \rightarrow x$$

$$L \rightarrow m$$

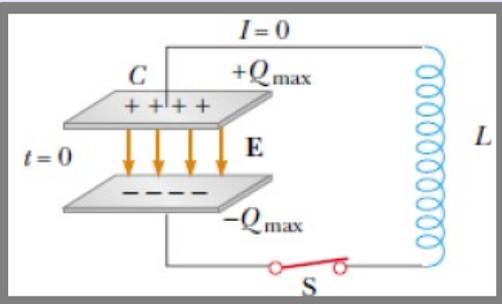
$$i \rightarrow v$$

$$\frac{1}{C} \rightarrow k$$

A amplitude e a constante de fase são determinadas pelas condições iniciais (no circuito LC , $i(0)$ e $q(0)$).



Oscilação eletromagnética



Energia no circuito em qualquer instante de tempo:

$$\Rightarrow U = U_B + U_E = \frac{Li^2(t)}{2} + \frac{q^2(t)}{2C}$$

Como não há resistência no circuito, temos:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \left(i = \frac{dq}{dt} \right)$$

cuja solução é: $\Rightarrow q(t) = q_{m\acute{a}x} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

“A frequência de oscilação depende somente dos valores de L e C do circuito”

$$\text{Movimento Oscilatório} = \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} & \text{Frequência de oscilação} \\ q_{m\acute{a}x} & \text{Amplitude} \\ \varphi & \text{Constante de fase} \end{cases}$$



Oscilação eletromagnética

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2} q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow q(t) = ae^{yt} + be^{yt}$$

$$\Rightarrow y = \pm i\omega \Rightarrow q(t) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$

$$q(t) = a(\cos\omega t + i\text{sen}\omega t) + b(\cos\omega t - i\text{sen}\omega t)$$

$$q(t) = (a + b)\cos\omega t + i(a - b)\text{sen}\omega t$$

$$q(t) = c_1\cos\omega t + ic_2\text{sen}\omega t$$



Oscilação eletromagnética

fazendo $c_1 = A \cos \varphi$ e $c_2 = i A \sin \varphi$

$$\Rightarrow q(t) = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t$$

como $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$$\Rightarrow q(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

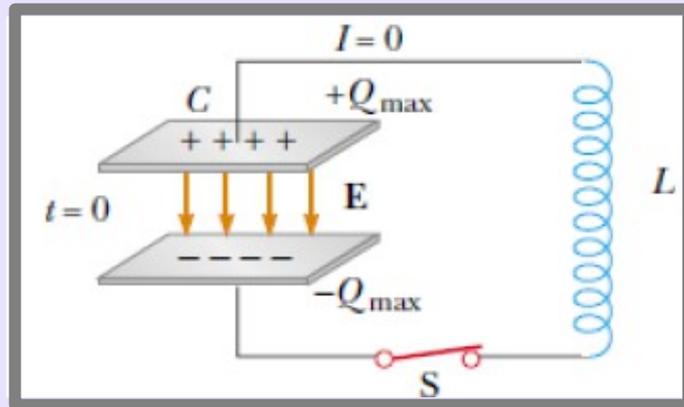
$t = 0 \Rightarrow$ a carga no capacitor é máxima

$$\Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) = 1 \Rightarrow q_{\text{máx}} = A$$

$$\Rightarrow q(t) = q_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)$$

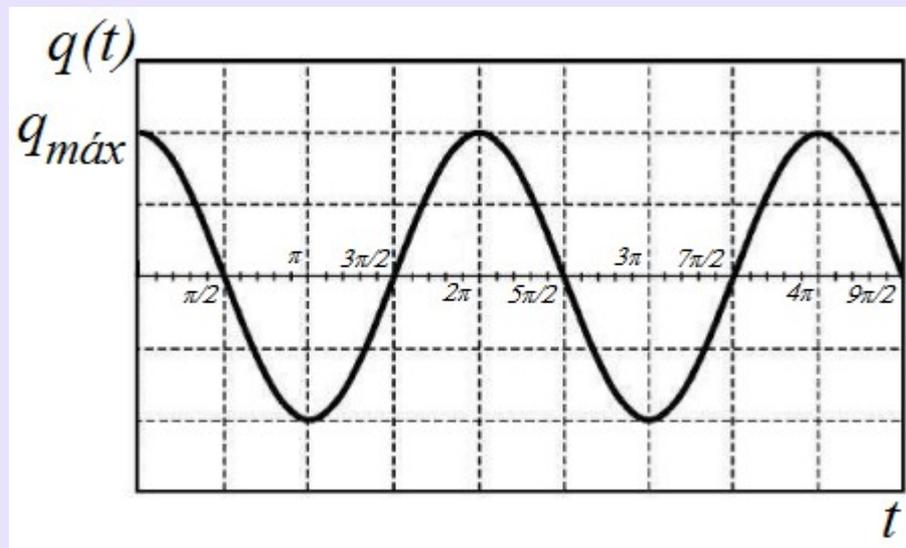


Comportamento da carga

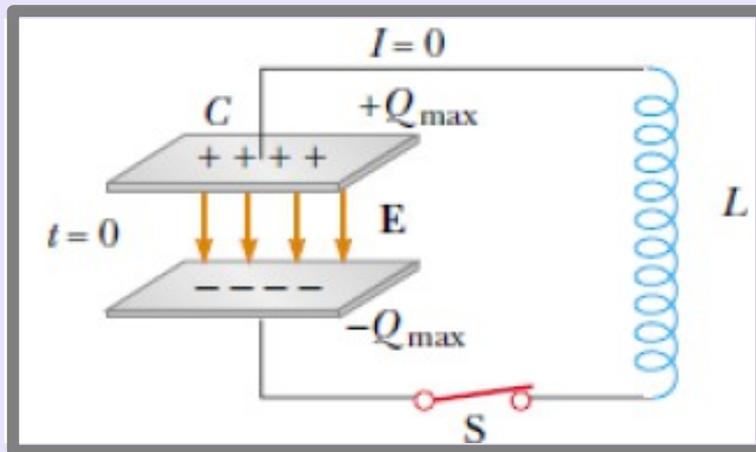


$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Em } t = 0 \Rightarrow q(0) = q_{\max} \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \text{ se } \varphi = 0$$



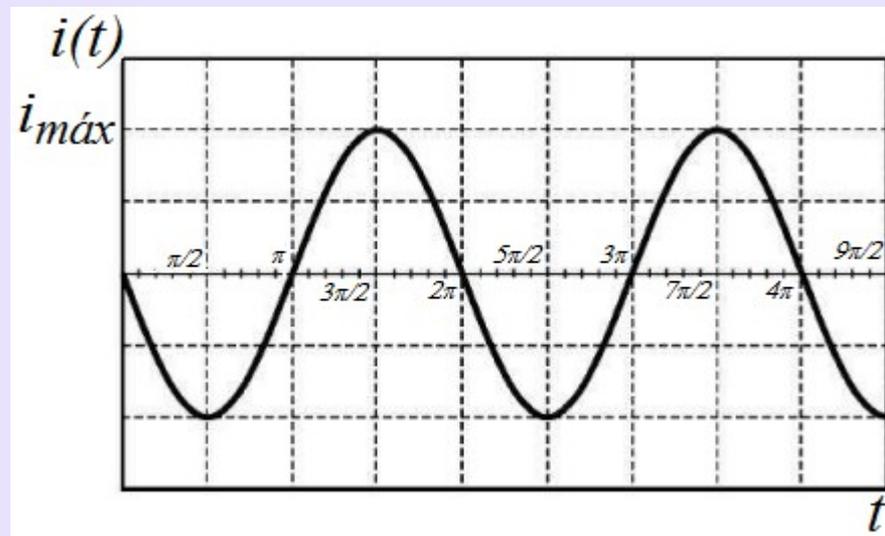
Comportamento da corrente



$$i = \frac{dq}{dt} = - \underbrace{\omega Q_{\max}}_{i_{\max}} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow i(t) = -i_{\max} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Em $t = 0 \Rightarrow i(t) = 0 \Rightarrow \text{sen}(\varphi) = 0$ se $\varphi = 0$



Conservação da energia

- Energia armazenada no campo elétrico em cada instante da oscilação



$$U_E = U_C = \frac{q_{máx}^2}{2C} \cos^2 \omega t$$

- Energia armazenada no campo magnético em cada instante da oscilação



$$U_B = U_L = \frac{Li_{máx}^2}{2} \sen^2 \omega t$$

$$U = U_C + U_L$$

$$U = \frac{q_{máx}^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{Li_{máx}^2}{2} \sen^2 \omega t$$

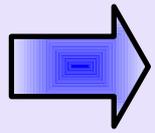
$$\frac{q_{máx}^2}{2C} = \frac{Li_{máx}^2}{2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{q_{máx}^2}{2C} \underbrace{(\cos^2 \omega t + \sen^2 \omega t)}_1 = \frac{Li_{máx}^2}{2} \underbrace{(\cos^2 \omega t + \sen^2 \omega t)}_1$$

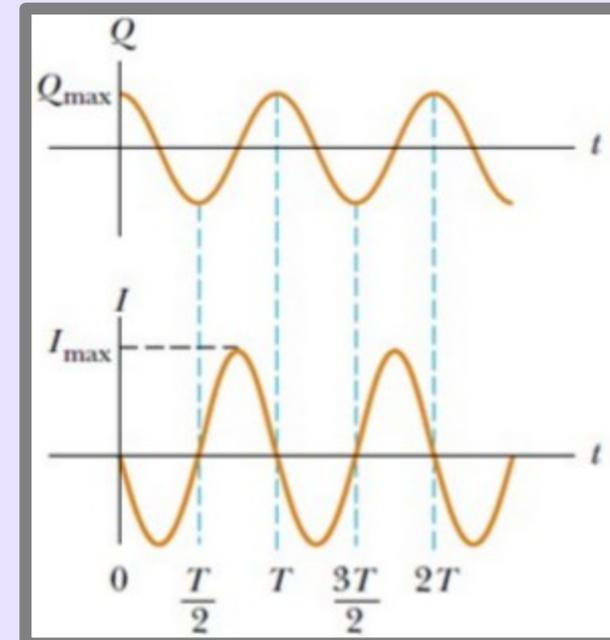
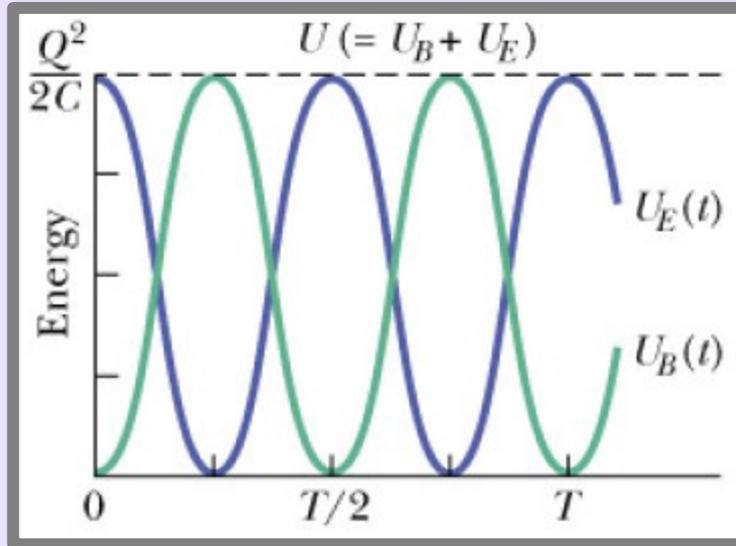
$$\Rightarrow U = \frac{q_{máx}^2}{2C} = \frac{Li_{máx}^2}{2} = C^{te} \text{ no tempo}$$



Conservação da energia

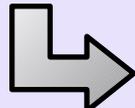


$$U = U_C + U_L = \frac{q_{máx}^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{Li_{máx}^2}{2} \sin^2 \omega t$$



Oscilações amortecidas

- Circuito LC real  possui resistência R

 U não é mais constante no tempo



A energia é dissipada pela resistência do circuito

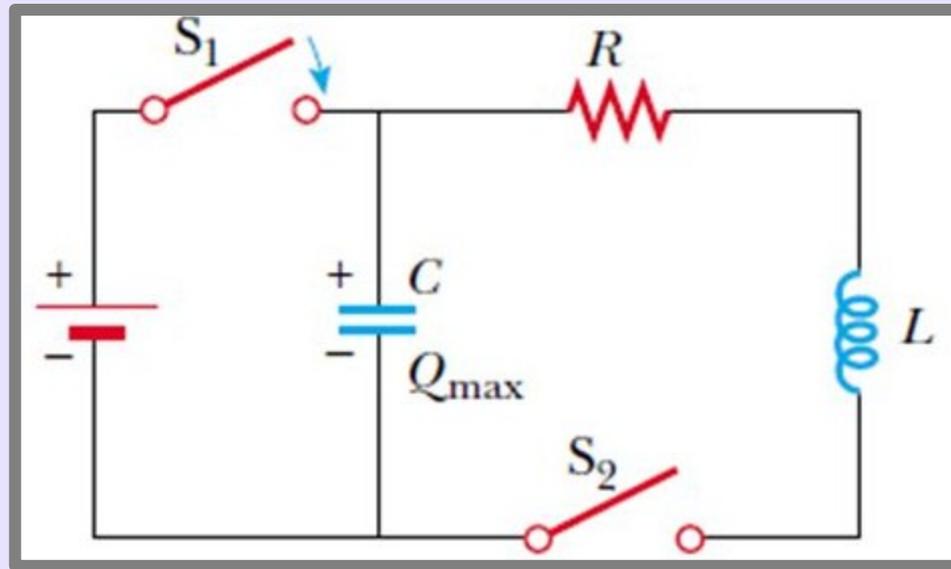


$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R$$

 A energia decresce no tempo



Circuito RLC em série



$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (U_L + U_C)$$

$$\text{como } i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad -i^2 R = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow -iR = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$\text{Sendo } \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

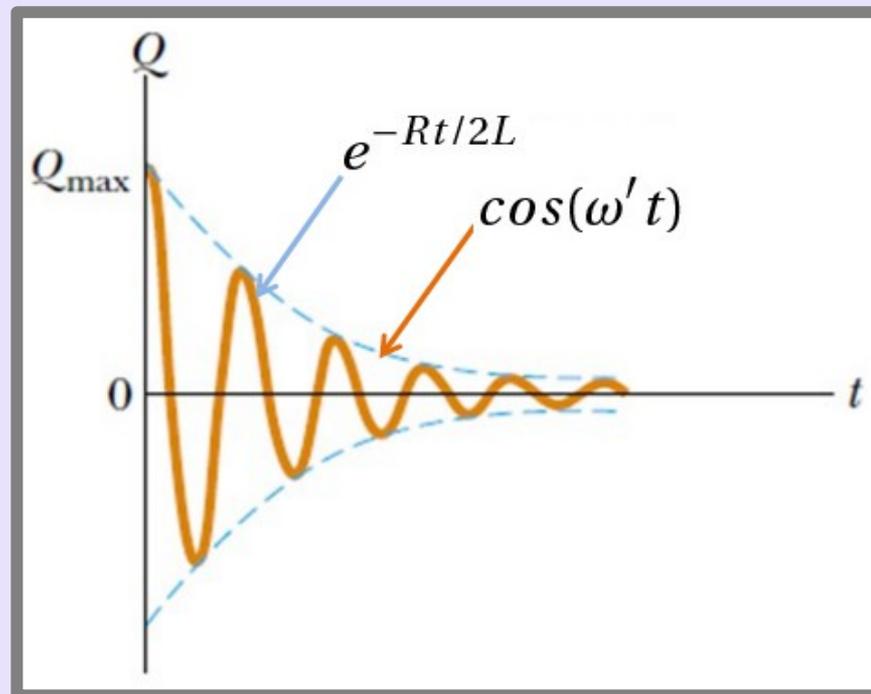


Circuito RLC em série

eq. diferencial $\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$

Solução geral $\Rightarrow q(t) = q_{m\acute{a}x} e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega' t + \varphi)$

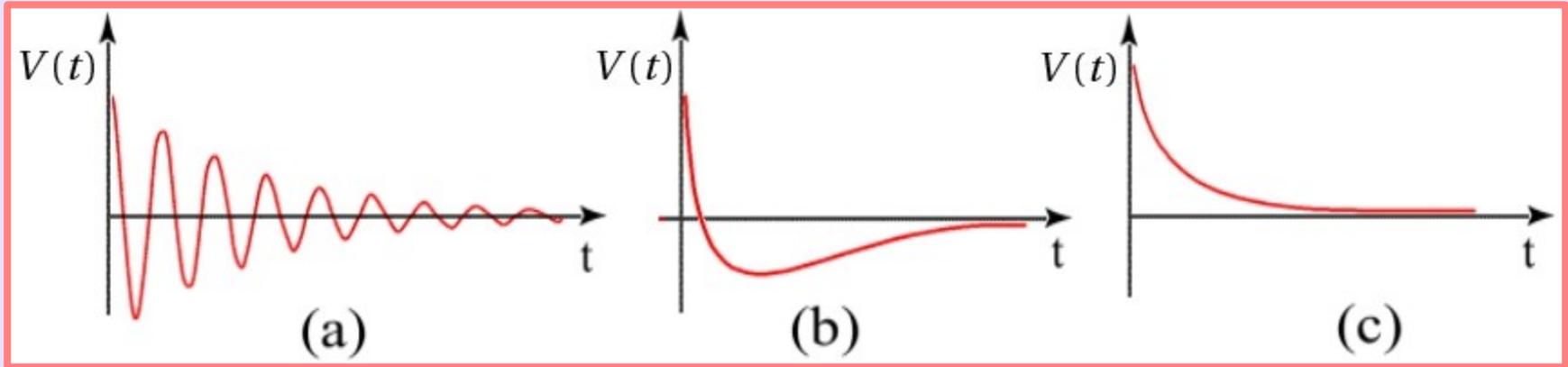
$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}; \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$



Circuito RLC em série

$$V(t) = Ri = R \frac{dq}{dt} = V_{m\acute{a}x} e^{-\frac{Rt}{2L}} \text{sen}(\omega't + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$



$$a) \left(\frac{1}{LC}\right)^2 > \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Rightarrow \text{oscila\~{c}\~{a}o subamortecida}$$

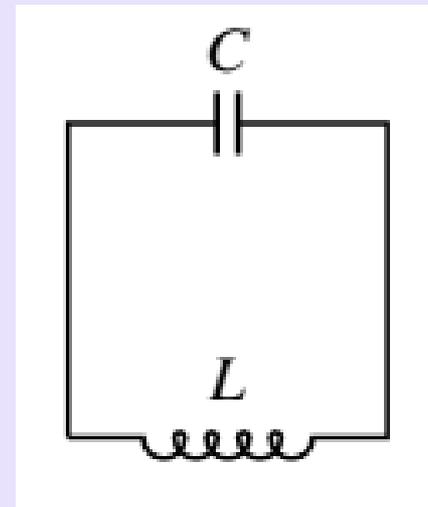
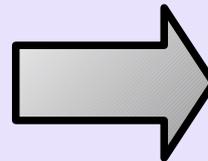
$$b) \left(\frac{1}{LC}\right)^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Rightarrow \text{oscila\~{c}\~{a}o cr\~{i}tico}$$

$$c) \left(\frac{1}{LC}\right)^2 < \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Rightarrow \text{oscila\~{c}\~{a}o superamortecido}$$

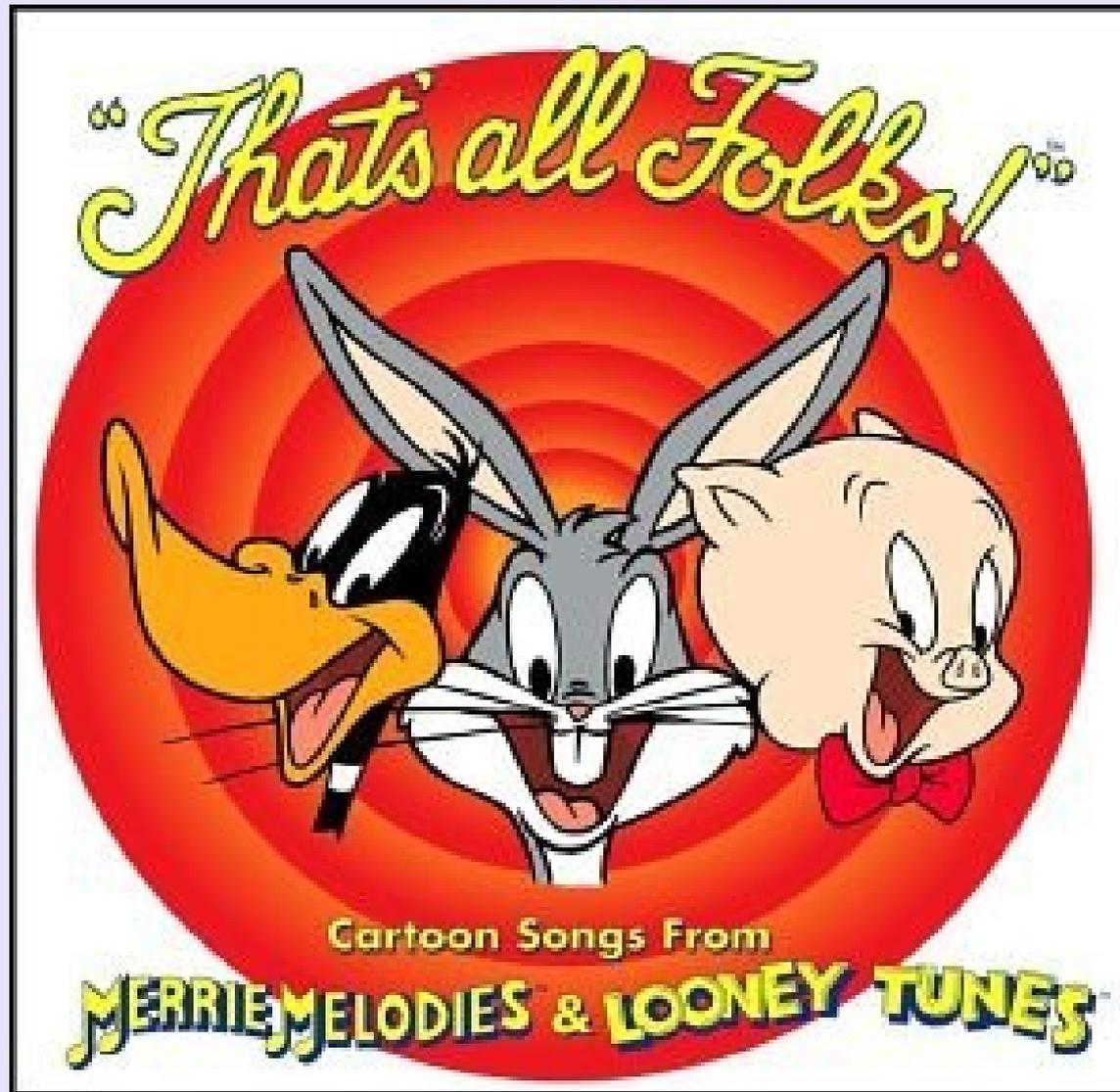


Aplicação (contagem do tempo)

Contagem de tempo \Rightarrow circuito oscilante LC



FIM



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense